

LNf - 62/2

G. Pesamosca: UN PROCEDIMENTO NUMERICO PER IL CALCOLO  
DELLE TRAIETTORIE IN UN ANALIZZATORE MAGNETICO.

Nota interna: n° 109  
13 Gennaio 1962

INF-62/2

Nota interna: n° 109  
13 Gennaio 1962

G. Pesamosca<sup>(x)</sup>: UN PROCEDIMENTO NUMERICO PER IL CALCOLO DELLE TRAIETTORIE IN UN ANALIZZATORE MAGNETICO.

Introduzione.

La determinazione delle traiettorie di particelle cariche in un campo magnetico è un problema molto complesso dal punto di vista generale, suscettibile però di semplificazioni in molti casi particolari.

Viene qui considerato il caso di un analizzatore magnetico dotato di un piano mediano di simmetria, in cui la distribuzione del campo sia nota mediante una serie di misure fatte nei nodi di un reticolo cartesiano di passo opportuno. Si prendono in esame le traiettorie svolgentisi nel piano di simmetria e quelle che, nell'approssimazione di Gauss, si possono considerare abbastanza vicine a questo piano.

Nella presente nota si espone un metodo numerico atto al calcolo di queste traiettorie, il quale si presta ad essere programmato su di un calcolatore e-

---

(x) - Presentemente all'Istituto Superiore delle Telecomunicazioni.

lettronico.

Tale metodo può essere applicato a qualsiasi campo magnetico la cui unica particolarità sia quella di avere un piano di simmetria.

In particolare è stato applicato al calcolo delle traiettorie nello spettrometro a coppie dei Laboratori Nazionali del Sincrotrone.

Le equazioni delle traiettorie.

Una particella carica in moto nel piano mediano di simmetria di un analizzatore descrive una traiettoria piana ottenibile dall'equazione differenziale

$$1) \quad y'' = \frac{1}{R(xy)} (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

dove

$$2) \quad R(xy) = \frac{\rho}{q \cdot B(xy)}$$

rappresenta il raggio di curvatura.

Nel seguito una traiettoria calcolata mediante la 1) verrà detta "traiettoria principale".

Si supponga ora nota una traiettoria appartenente al piano di simmetria e si vogliano calcolare quelle traiettorie che nell'approssimazione di Gauss, si possono considerare abbastanza vicine ad essa. In approssimazione lineare tale calcolo può essere effettuato integrando le seguenti equazioni di Kerst e Serber<sup>(1)</sup>:

$$3) \quad \frac{d^2 \xi}{ds^2} + [1 - n(s)] \frac{\xi}{\rho^2(s)} = - \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$4) \quad \frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \frac{n(s)}{\rho^2(s)} \zeta = 0$$

dove:

s è l'ascissa curvilinea lungo la traiettoria nota

$\rho(s)$  il raggio di curvatura

$\xi$  e  $\zeta$  gli scostamenti dalla traiettoria nota, rispettivamente in senso orizzontale e in senso verticale.

$$n(s) = - \frac{\rho}{B} \frac{\partial B}{\partial \eta}$$

l'indice del campo ( $\eta$  è la norma-

le alla traiettoria nota).

Una traiettoria calcolata mediante la 3) o la 4) od entrambe, nel seguito verrà detta "variata" rispetto alla traiettoria lungo cui è definita l'ascissa curvilinea s.

Il calcolo della traiettoria principale.

La prima difficoltà che si incontra nella integrazione numerica della 1) consiste nel modo di trattare la funzione  $B(xy)$ , che si suppone data mediante un insieme di valori discreti misurati sperimentalmente in punti equidistanti appartenenti ad un reticolo cartesiano. I nodi del reticolo possono essere in numero elevatissimo, anche dell'ordine delle decine di migliaia.

Si dovrà pertanto scegliere un procedimento numerico che tenga conto del modo particolare con cui è data la funzione da elaborare.

Il metodo che nel seguito si espone è basato sulla scelta delle formule del Milne<sup>(0)</sup> per l'integrazione numerica di un'equazione differenziale.

---

(0) - Come è noto, il metodo del Milne<sup>(2)</sup> per l'integrazione numerica di una equazione del 1° ordine  $y' = f(x, y)$  è basato sull'uso delle 2 formule, dette rispettivamente di predizione e correzione:

$$5) \quad y_{n+1} = y_{n-3} + h \left\{ \frac{8}{3} y'_{n-2} - \frac{4}{3} y'_{n-1} + \frac{8}{3} y'_n \right\}$$

$$6) \quad y_{n+1} = y_{n-1} + h \left\{ \frac{1}{3} y'_{n-1} + \frac{4}{3} y'_n + \frac{1}{3} y'_{n+1} \right\}$$

in cui h è il passo di integrazione.

Convorrà considerare i valori del campo nei nodi del reticolo cartesiano come elementi di una matrice  $B = \|\|B_{ij}\|\|$  a  $p$  righe ed  $m$  colonne (v. fig. 1) ed assumere il passo d'integrazione  $h$  uguale al passo del reticolo.

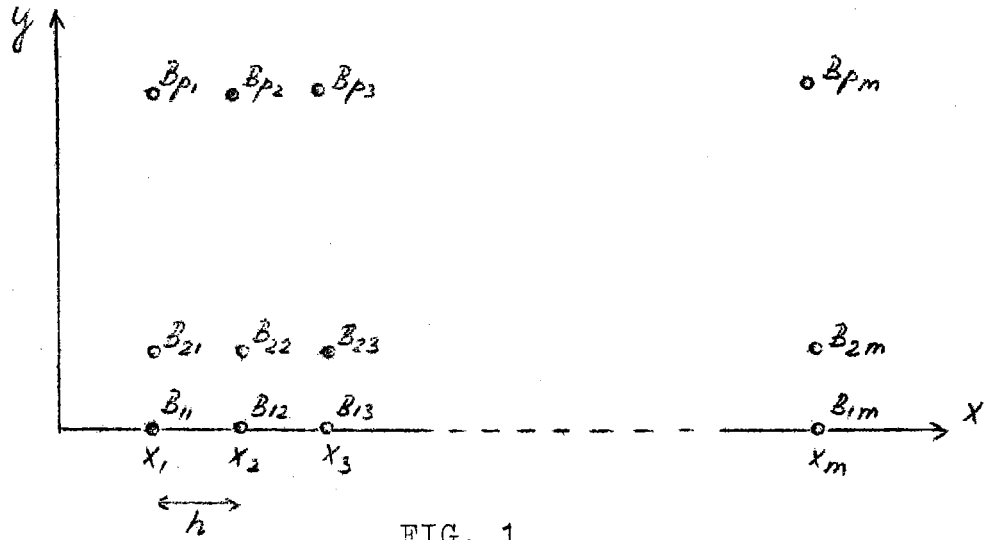


FIG. 1

A differenza di altri metodi, tra cui quello di Runge-Kutta, il metodo del Milne applicato ad una equazione del 2° ordine

$$7) \quad y'' = G(xy, y')$$

richiede il calcolo della  $G(xy, y')$ , per quanto riguarda la sua dipendenza da  $x$ , in corrispondenza al solo valore  $x = x_n$  relativo al passo che si sta eseguendo. Pertanto nell'integrazione numerica della 1), in corrispondenza al passo  $n$ -esimo, sarà sufficiente avere presente nella memoria di lavoro del calcolatore la sola colonna  $n$ -esima della matrice  $B$ .

Le singole colonne potranno essere via via chiamate, durante il corso della elaborazione, da una memoria ausiliaria, che può essere a seconda del calcolo

lattore a disposizione un tamburo magnetico, un nastro magnetico, o semplicemente un nastro di carta perforata.

Il problema della variabilità della  $G(xy, y')$  rispetto ad  $y$ , che compare nella 1) solo tramite la funzione  $B(xy)$  potrà essere risolto mediante interpolazione sui valori degli elementi appartenenti alla colonna  $n$ -esima della matrice  $B$ .

Da quanto esposto, risulta chiaramente come la scelta del metodo del Milne faciliti grandemente la programmazione per la selezione e l'interpolazione dei valori del campo  $B(xy)$ .

Applicato ad una equazione del 2° ordine<sup>(2)</sup> esprimibile nella forma 7) il metodo può tradursi nel seguente procedimento risolutivo (supponendo l'integrazione compiuta per i primi  $n$  passi):

- 1) Calcolo di  $y'_{n+1}$  con la formula di predizione
- 2) Calcolo di  $y_{n+1}$  con la formula di correzione
- 3) Calcolo di  $y''_{n+1}$   $G(x_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1})$  dalla equazione differenziale
- 4) Nuovo calcolo di  $y'_{n+1}$  con la formula di correzione.
- 5) Nuovo calcolo di  $y_{n+1}$  con la formula di correzione. Questo punto è analogo al 2).
- 6) Ripetizione dei punti 3) 4) 5) finchè due valori successivi di  $y$  ed  $y'$  risultino coincidenti entro una prescritta tolleranza.

Da quanto esposto risulta che il procedimento è iterativo e dà origine a due successioni di valori di  $y_{n+1}$  ed  $y'_{n+1}$  <sup>che</sup> entro condizioni molto generali<sup>(4)</sup>, risultano convergenti. E' bene osservare però che le successioni non convergono verso la vera soluzione della equazione e la sua derivata, ma verso una loro appros

simazione. Più avanti daremo brevemente il grado di precisione che è possibile ottenere.

Il procedimento risolutivo descritto può riassumersi nel diagramma a blocchi rappresentato in figura 2. Per una sua migliore comprensione si osservi che le lettere dell'alfabeto greco indicano determinate zone di memoria in cui sono registrati dei dati; se sono racchiuse tra parentesi indicano invece il contenuto delle zone di memoria cui si riferiscono. Il contatore  $n$  aumenta progressivamente al termine di ciascun passo d'integrazione ( $N$  in tutto, considerando anche i primi tre che vanno calcolati a parte), ed il contatore  $l$  ha il compito di impedire l'invio al test di coincidenza prima che siano stati calcolati almeno due valori di  $y_{n+1}$  e due di  $y'_{n+1}$ .

Il metodo del Milne richiede di essere innescato mediante un altro procedimento che fornisca i valori di  $y$ ,  $y'$  ed  $y''$  relativi ai primi tre passi. Può servire ottimamente allo scopo il tradizionale metodo di Runge-Kutta<sup>(3)</sup>; la difficoltà connessa con il modo di introdurre nei calcoli la funzione  $B(x,y)$  può essere eliminata considerando che, nei primi 3 passi, la traiettoria si può confondere con la propria tangente, e quindi il campo lungo essa può esprimersi come funzione della sola  $x$ .

In tal modo all'innescato la 1) assume la forma

$$8) \quad y'' = K B(x) (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

dove  $B(x)$  può ad esempio essere un polinomio che approssima il campo  $B(xy)$  lungo la tangente alla traiettoria nel punto iniziale.

Per quanto riguarda la precisione ottenibile nei calcoli, si osservi che la formula di correzione 6)



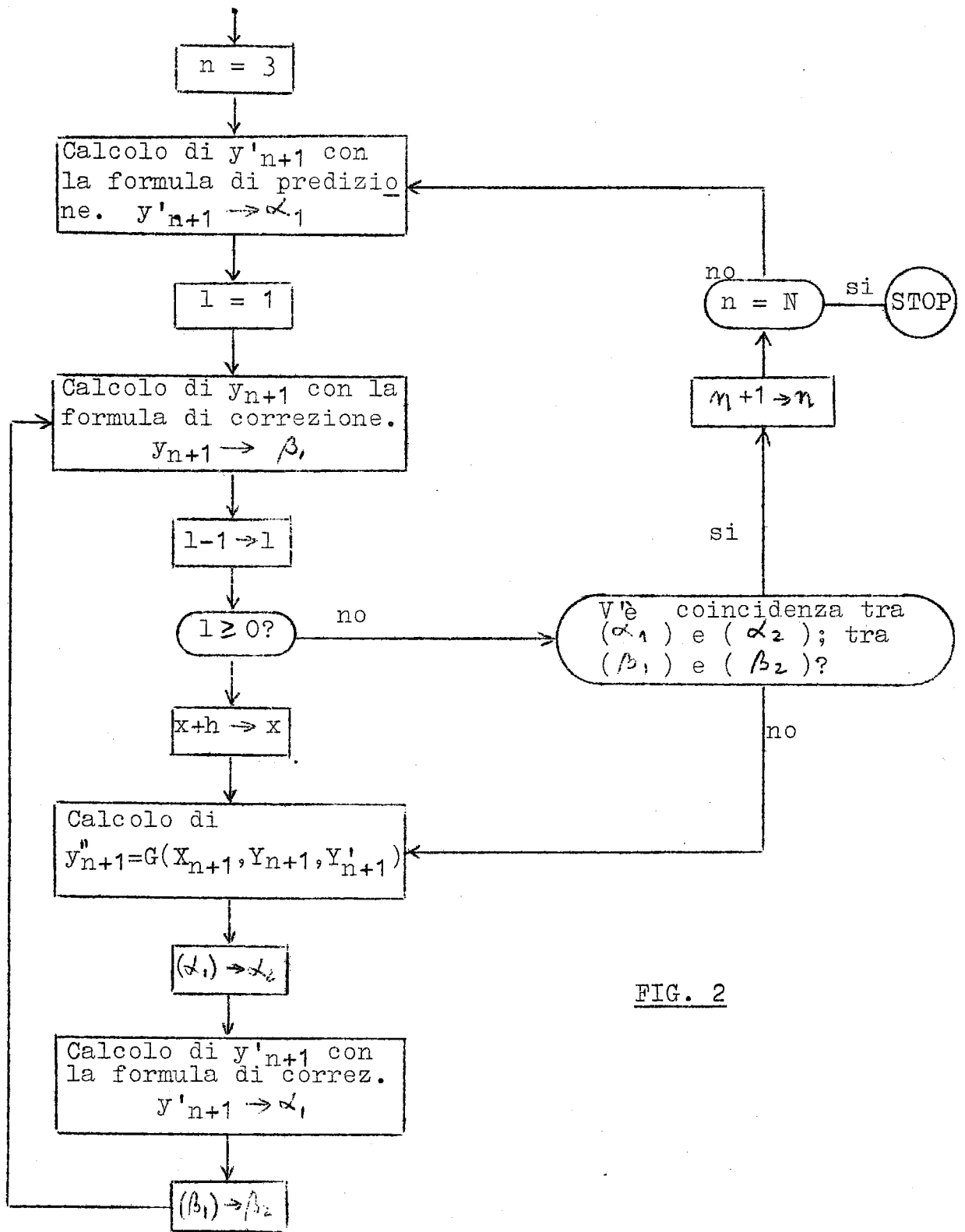


FIG. 2

comporta un errore di troncamento dato da

$$9) \quad T_n = -\frac{1}{720} h^5 y^{(5)}\left(\xi\right)$$

dove  $\xi$  è un opportuno punto compreso tra  $X_{n-1}$  ed  $X_{n+1}$ .

Per valutare l'ordine di grandezza dell'errore si sono eseguiti calcoli di prova in campo magnetico costante. Si è trovato che l'errore risulta lentamente crescente con la pendenza della curva.

Ad esempio per una traiettoria circolare di 166 cm di raggio si è avuto, per  $X = 66$  cm,  $y = 13,2$  cm ed  $y' = 0,4$ , un errore di 0,18 mm. Per un'altra traiettoria di raggio 50 cm si è avuto, in corrispondenza ad  $x = 49$  cm  $y' = 5,3$ , un errore di 1,5 mm.

Questi calcoli di controllo sono stati eseguiti con passo  $h = 1$  cm.

#### Il calcolo delle traiettorie variate.

Si supponga nota una traiettoria principale calcolata col procedimento descritto nel precedente paragrafo, e si vogliano calcolare mediante le equazioni 3) e 4) le traiettorie variate rispetto ad essa.

Si osservi però che la variabile indipendente  $s$ , che compare nelle equazioni di Kerst e Serber, non è nota e neppure facilmente determinabile. Tale difficoltà può essere eliminata operando nelle 3) e 4) un cambiamento di variabile, in modo da ottenere come variabile indipendente l'ascissa  $x$  cui è riferita la traiettoria principale.

Allo scopo basta operare nelle 3) e 4) la sostituzione

$$A(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(t)} dt$$

dove  $y$  è l'ordinata della traiettoria principale. Tenendo presente che valgono le

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} \quad \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{y' y''}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ed esprimendo nelle 3) e 4) le derivate rispetto ad  $s$  per mezzo delle derivate rispetto ad  $x$ , si ottengono le nuove equazioni che danno gli scostamenti dalla traiettoria principale in funzione dell'ascissa  $X$ .

Precisamente si ottiene per l'equazione delle oscillazioni orizzontali:

$$11) \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{d^2s}{dx^2} \frac{y'(x)y''(x)}{1+y'^2(x)} + \frac{\{n(x)-1\} \sqrt{1+y'^2(x)}}{s^2(x)} - \frac{(1+y'^2(x)) \Delta p}{s(x) p_0}$$

e per l'equazione delle oscillazioni verticali:

$$12) \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{d^2s}{dx^2} \frac{y'(x)y''(x)}{1+y'^2(x)} - \frac{n(x)(1+y'^2(x))}{s^2(x)}$$

Nelle due equazioni così ottenute compaiono quattro funzioni note della  $x$ , e precisamente:

$$13) \quad y'(x), y''(x), \frac{1}{s(x)}, n(x).$$

Le prime tre della 13) si ottengono come risultati intermedi nel calcolo della traiettoria principale, e devono quindi essere inviate ad una memorizzazione esterna (nastro perforato, o schede, ecc.) assieme alla  $y(x)$ .

La determinazione dell'indice del campo

$$n(x) = - \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{s}{B}$$

richiede di conoscere l'andamento della  $\frac{\partial B}{\partial \eta}$ . Ciò si può ottenere riportando sulla mappa del campo un grafico della traiettoria principale, e valutando in

corrispondenza ai valori di  $x$  multipli interi di  $h$ , i rapporti incrementali

Le quattro funzioni 11) risultano in definitiva note nei punti equidistanti di ascissa  $x = jh$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) e possono pertanto essere calcolate dovunque in  $0 < X < N h$  mediante interpolazione.

Una volta chiariti questi punti l'integrazione numerica delle 11) e 12) non presenta difficoltà e può essere effettuata anche col tradizionale metodo di Runge-Kutta.

#### Applicazione al calcolo delle traiettorie nello spettrometro a coppie.

Il procedimento descritto è stato applicato al calcolo di traiettorie di elettroni corrispondenti a diversi valori dell'energia nello spettrometro a coppie dei Laboratori Nazionali di Frascati. Sono state integrate sia l'equazione 1) che le 11) e 12) con un campo magnetico definito mediante circa 7000 valori di  $B(xy)$  corrispondenti ai nodi di un reticolo cartesiano di passo  $h = 1$  cm. Si è utilizzata la macchina calcolatrice FERRANTI dell'I.N.A.C. (Consiglio Naz. delle Ricerche). I risultati di questo calcolo sono esposti in un articolo sullo spettrometro a coppie.<sup>(5)</sup>

Il programma è disponibile presso il servizio calcoli numerici dei Laboratori Nazionali di Frascati.

Bibliografia.

- (1) - D.W. Kerst and R. Serber, Phys. Rev. 60, 53 (1941)  
- P.G. Sona, Ottica degli analizzatori magnetici nell'approssimazione di Gauss. Nota interna N° 3, Laboratori Naz. di Frascati del C.N.E.N.
- (2) - W.E. Milne, Numerical solution of differential equations.  
- Hyldebrand - Introduction to numerical Analysis, pag. 199 e seg. Per le equazioni del II° ordine: pag. 214 e seg.
- (3) - C. Runge - Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen - Mat. Ann.46 (1895).  
G. Sansoni - Equazioni differenziali nel campo reale, pag. 284.
- (4) - Hyldebrand - Op. Cit.
- (5) - G. Bologna, G. Diambri, R. Toschi, A.S. Figuera, U. Pellegrini, B. Rispoli, A. Serra - Nucl. Instr. and Methods - Vol. 12 n° 2, pg. 263 (1961).